Über die Werte der von der Grenze der Variable $x = 0$ bis hin zu $x = \infty$ erstreckten Integrale*

Leonhard Euler

§1 Von solchen Formeln, die von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = \infty$ erstreckt einen endlichen Wert annehmen, ist die einfachste die kreisabhängige $\int \frac{\partial x}{1+xx}$, deren Wert $\frac{\pi}{2}$ ist, während π den Umfang des Kreises mit Durchmesser $= 1$ bezeichnet. Dann habe ich sogar mit einer völlig einzigartigen Methode gefunden, dass

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^n} \begin{bmatrix} \text{von} & x = 0 \\ \text{bis} & x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

ist. Außerdem habe ich auf diese Weise in der Tat viele andere Formeln dieser Gattung erledigt, in deren Differentiale nicht nur algebraische Funktionen von x, sondern auch $\log x$ eingeht.

§2 Es haben sich mir aber gewisse andere auch transzendente Funktionen beinhaltende Formeln aufgezeigt, deren verlangte Werte alle bisher bekannten Methoden zu widerstehen scheinen. Ich hatte nämlich die Kurve gesucht, in welcher der Krümmungsradius überall dem Kurvenbogen umgekehrt proportional ist, sodass, nachdem der Bogen $= s$ und der Krümmungsradius $= r$ gesetzt worden ist,

---

*Originaltitel: "De valoribus integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum", zuerst publiziert in: *Institutionum calculi integralis, Band* 4 (1794, verfasst 1781): pp. 337–345, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 217 – 227, Eneström-Nummer E675, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$rs = aa$$

ist. Daraus ist es nämlich nicht schwer, die Form der Kurve quasi freihändig zu beschreiben, weil sie eine solche Form haben muss (Fig. 1)[1].

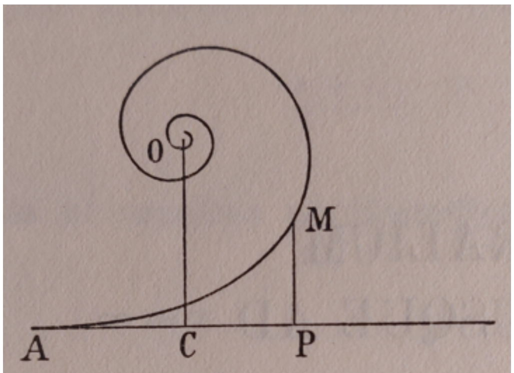

Fig. 1

Nachdem der Anfang nämlich in A festgelegt worden ist, wird die Kurve von dort aus immer mehr gekrümmt werden und schließlich nach unendlich vielen Spiralen zu einem gewissen Punkt O verdichtet werden, welcher sich der *Pol* dieser Kurve nennen lassen wird. Es war mir also vorgelegt, den Ort dieses Pols genauer zu untersuchen und für ihn die Größe der Koordinaten AC und CO zu ermitteln.

§3 Nachdem also für dieses Ziel die Amplitude $= \varphi$ eines Kurvenstücks $AM = s$ in die Rechnung eingeführt worden ist, dass $r = \frac{\partial s}{\partial \varphi}$ ist, wird

$$s\partial s = aa\partial\varphi$$

und daher $ss = 2aaa\varphi$ und

$$s = a\sqrt{2\varphi} = 2c\sqrt{\varphi}.$$

Daher geht nun $\partial s = \frac{c\partial\varphi}{\sqrt{\varphi}}$ hervor, woher, nachdem die Abszisse für diesen Bogen $AP = x$ und die Ordinate $PM = y$ gesetzt worden ist, man folgert, dass

[1]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

$$x = c\int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\sqrt{\varphi}} \quad \text{und} \quad y = c\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi}{\sqrt{\varphi}}$$

ist.

§4 Daher werden also für die Bestimmung des Pols O die Werte dieser Integralformeln verlangt, nachdem sie von der Grenze $\varphi = 0$ bis hinzu $\varphi = \infty$ erstreckt worden waren. Anfänglich habe ich freilich geglaubt, dass diese Werte nur über Approximation erhalten werden können, während jede der beiden Formeln sukzessive abschnittsweise entwickelt wird; natürlich zuerst von $\varphi = 0$ bis hin zu $\varphi = \pi$, dann von $\varphi = \pi$ bis hin zu $\varphi = 2\pi$, weiter von $\varphi = 2\pi$ bis hin zu $\varphi = 3\pi$ etc., wonach eine hinreichend schnell konvergierende Reihe hervorgehen wird. Aber es ist ersichtlich, dass diese Operation lange und ziemlich unangenehme Rechnungen verlangt, welche ich nicht zu durchzuführen gewagt habe. Neulich habe ich aber in einem glücklichen Zufall mit einer vollkommen einzigartigen Methode erkannt, dass so

$$\int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\sqrt{\varphi}} \begin{bmatrix} \text{von} & x = 0 \\ \text{bis} & x = \infty \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

wie

$$\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi}{\sqrt{\varphi}} \begin{bmatrix} \text{von} & x = 0 \\ \text{bis} & x = \infty \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ist, sodass für den gesuchten Ort O des Pols

$$AC = c\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{und} \quad CO = c\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ist.

§5 Weil ja also die Methode, mit welcher ich hierher geführt worden bin, nicht unertragreich zu sein scheint, glaube ich, dass es den Geometern nicht missfallen wird, wenn ich sie hier mit aller Sorgfalt erläutern werde. Und weil sie sich um vieles weiter erstreckt als auf diese Formeln, werde ich sie in aller Allgemeinheit vortragen, all was ich aus der Betrachtung dieser ziemlich einfachen Formel

$$\int x^{n-1}\partial x e^{-x}$$

abgeleitet habe, deren Integral also zunächst für die verschiedenen Werte des Exponenten n ausfindig gemacht werden muss.

§6 Und zuerst ist freilich für den Fall $n = 1$ das Integral dieser Formel $\int \partial x e^{-x}$ offensichtlich $1 - e^{-x}$, was im Fall $x = 0$ verschwindet, aber für $x = \infty$ in die Einheit übergeht. Außerdem, weil das Differential dieser Formel $x^{\lambda}e^{-x}$

$$\lambda x^{\lambda-1}\partial x e^{-x} - x^{\lambda}\partial x e^{-x}$$

ist, wird umgekehrt

$$\int x^{\lambda}\partial x e^{-x} = \lambda \int x^{\lambda-1}\partial x e^{-x} - x^{\lambda}e^{-x}$$

sein, welches letzte Glied so für den Fall $x = 0$ wie $x = \infty$ verschwindet, wenn nur $\lambda > 0$ war. Dann wird also für unsere Integrationsgrenzen

$$\int x^{\lambda}\partial x e^{-x} = \lambda \int x^{\lambda-1}\partial x e^{-x}$$

sein, mithilfe welcher Formel wegen $\int \partial x e^{-x} = 1$ die folgenden Werte der Integrale abgeleitet werden

$$\begin{aligned}
\int x\ \partial x e^{-x} &= 1, \\
\int x^2\partial x e^{-x} &= 1 \cdot 2, \\
\int x^3\partial x e^{-x} &= 1 \cdot 2 \cdot 3, \\
\int x^4\partial x e^{-x} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4
\end{aligned}$$

und so im Allgemeinen

$$\int x^{n-1}\partial x e^{-x} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1),$$

die Werte welches Produkts, sooft n eine ganze positive Zahl war, sich von selbst zeigen; wannimmer aber n eine gebrochene Zahl ist, habe ich einst gezeigt, wie die Werte über Quadraturen von algebraischen Kurven dargeboten werden können. So ist für den Fall $n = \frac{1}{2}$ bekannt, dass dieser Wert $= \sqrt{\pi}$ ist.

§7 Weil also alle Werte dieses unendlichen Produkts $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)$ als bekannt angesehen werden können, werde ich sie mit dem Buchstaben $\triangle$ bezeichnen, sodass

$$\triangle = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)$$

ist, und so haben wir diese außerordentliche Integralformel

$$\int x^{n-1} \partial x e^{-x} = \triangle$$

erhalten, nachdem das Integral natürlich von $x = 0$ bis hin zu $x = \infty$ erstreckt worden ist; und aus dieser Formel selbst habe ich alles abgeleitet, was sich auf den zuvor erwähnten Fall bezieht, wo freilich vollkommen einzigartige Begründungen angeführt werden müssen, welche ich hier also ausführlicher erläutern werde.

§8 Ich habe aber zuerst $x = ky$ gesetzt, und weil ja die beiden Grenzen des Integrals dieselben bleiben, wird auch

$$k^n \int y^{n-1} \partial y e^{-ky} = \triangle$$

sein, weil diese Formel ja auch von $y = 0$ bis zu $y = \infty$ erstreckt wird; deswegen werden wir nach Teilen durch k^n

$$\int y^{n-1} \partial y e^{-ky} = \frac{\triangle}{k^n}$$

haben, wo aber bemerkt werden muss, dass für k keine negativen Zahlen genommen werden können, weil andernfalls die Formel e^{-ky} nicht weiter im Fall $y = \infty$ verschwinden würde; und hier sind allein diese Werte auszuschließen, sodass auch imaginäre Werte anstelle von k verwendet werden können, und daher habe ich jene schwierigen Integrationen erlangt.

§9 Wir wollen also

$$k = p + q\sqrt{-1}$$

setzen, und weil

$$e^{-qy\sqrt{-1}} = \cos qy - \sqrt{-1} \cdot \sin qy$$

und

$$e^{+qy\sqrt{-1}} = \cos qy + \sqrt{-1} \cdot \sin qy$$

ist, wird unsere Formel nun diese Form annehmen

$$\int y^{n-1} \partial y e^{-py} (\cos qy - \sqrt{-1} \cdot \sin qy) = \frac{\triangle}{(p+q\sqrt{-1})^n}.$$

Deswegen, wenn wir die Vorzeichen der imaginären Formel ändern, wird in gleicher Weise

$$\int y^{n-1} \partial y e^{-py} (\cos qy + \sqrt{-1} \cdot \sin qy) = \frac{\triangle}{(p-q\sqrt{-1})^n}$$

sein.

§10 Damit sich die gefundenen Werte gefälliger ausdrücken lassen, wollen wir

$$p = f \cos\theta \quad \text{und} \quad q = f \sin\theta$$

setzen und es wird

$$(p+q\sqrt{-1})^n = f^n (\cos n\theta + \sqrt{-1} \cdot \sin n\theta)$$

und

$$(p-q\sqrt{-1})^n = f^n (\cos n\theta - \sqrt{-1} \cdot \sin n\theta)$$

sein; hier wird es förderlich sein bemerkt zu haben, dass $\tan\theta = \frac{q}{p}$ sein wird, woher aus den angenommen Werten p und q auch $f = \sqrt{pp+qq}$ sein wird. Auf diese Weise wird im ersten Fall also

$$\frac{\triangle}{(p+q\sqrt{-1})^n} = \frac{\triangle}{f^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin n\theta)},$$

für den anderen

$$\frac{\triangle}{(p-q\sqrt{-1})^n} = \frac{\triangle}{f^n(\cos n\theta - \sqrt{-1}\cdot\sin n\theta)^n}$$

sein. Deswegen, wenn diese zwei Formeln addiert werden, wird

$$\frac{2\triangle\cos n\theta}{f^n}$$

hervorgehen. Die Differenz dieser Formel gibt aber

$$\frac{2\triangle\sqrt{-1}\cdot\sin n\theta}{f^n}.$$

§11 Wir wollen also auch diese Integralformeln addieren und werden

$$\int y^{n-1}\partial y e^{-py}\cos qy = \frac{\triangle\cos n\theta}{f^n}$$

haben. Wenn wir sie aber subtrahieren und durch $2\sqrt{-1}$ teilen, entspringt

$$\int y^{n-1}\partial y e^{-py}\sin qy = \frac{\triangle\sin n\theta}{f^n},$$

welche zwei Integralformeln sich schon sehr weit erstrecken, weil die Zahlen p und q vollkommen unserem Belieben überlassen sind, lediglich mit der Einschränkung, dass für die Zahl p keine negativen Zahlen genommen werden dürfen. Es wird also der Mühe wert sein, diese zwei Integralformeln in den zwei folgenden Theoremen erfassen.

Theorem 1

Nachdem

$$\triangle = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)$$

gesetzt worden ist und indem man für die Buchstaben p und q irgendwelche positiven Zahlen annimmt, werde daher

$$\sqrt{pp+qq} = f,$$

und man suche den Winkel θ, dass

$$\tan\theta = \frac{q}{p}$$

ist, und man wird diese merkwürdige Integration haben

$$\int x^{n-1}\partial x e^{-px}\cos qx \begin{bmatrix} \text{von} & x=0 \\ \text{bis} & x=\infty \end{bmatrix} = \frac{\triangle\cos n\theta}{f^n}.$$

THEOREM 2

Nachdem

$$\triangle = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)$$

gesetzt worden ist und indem man für die Buchstaben p und q irgendwelche positiven Zahlen annimmt, werde daher

$$\sqrt{pp+qq} = f,$$

und man suche den Winkel θ, dass

$$\tan\theta = \frac{q}{p}$$

ist, und man wird diese merkwürdige Integration haben

$$\int x^{n-1}\partial x e^{-px}\sin qx \begin{bmatrix} \text{von} & x=0 \\ \text{bis} & x=\infty \end{bmatrix} = \frac{\triangle\sin n\theta}{f^n}.$$

§12 Weil wir also für den Fall der oben betrachteten Kurve zu diesen Integralformeln gelangt sind

$$\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\varphi}} \quad \text{und} \quad \int\frac{\partial\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\varphi}},$$

wird nach der Anwendung $n=\frac{1}{2}$ und daher $\triangle = \sqrt{\pi}$ sein, dann wird aber $p=0$ und $q=1$ sein, woher $f=1$ und $\tan\theta = \frac{q}{p} = \infty$ und daher $\theta = \frac{\pi}{2}$ wird, also $\cos n\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin n\theta$. Daher wird also

$$\int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\sqrt{\varphi}} \begin{bmatrix} \text{von} & x = 0 \\ \text{bis} & x = \infty \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

und zugleich

$$\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi}{\sqrt{\varphi}} \begin{bmatrix} \text{von} & x = 0 \\ \text{bis} & x = \infty \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

§13 Es wird aber der Mühe wert sein, diesen Fall, in dem $n = \frac{1}{2}$ und $\triangle = \sqrt{\pi}$ ist, im Allgemeinen zu entwickeln; und weil wir

$$\sqrt{pp + qq} = f \quad \text{und} \quad \frac{q}{p} = \tan\theta$$

gesetzt haben, wird

$$\sin\theta = \frac{q}{f} \quad \text{und} \quad \cos\theta = \frac{p}{f}$$

sein. Daher also zuerst

$$\sin\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{f-p}{2f}}$$

und

$$\cos\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{f+p}{2}};$$

daraus wird für die Integralwerte

$$\frac{\triangle \sin\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{\pi}}{f} \cdot \sqrt{\frac{f-p}{2}}$$

und

$$\frac{\triangle \cos\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{\pi}}{f} \cdot \sqrt{\frac{f+p}{2}}.$$

Deswegen werden wir die zwei folgenden Integralformeln haben

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} e^{-px} \sin qx = \frac{\sqrt{\pi}}{f} \cdot \sqrt{\frac{f-p}{2}}$$
$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} e^{-px} \cos qx = \frac{\sqrt{\pi}}{f} \cdot \sqrt{\frac{f+p}{2}}.$$

§14 Aber die Fälle, in denen für n eine ganze positive Zahl genommen wird und daher $\triangle$ absolut mit ganzen Zahlen dargeboten werden kann, sind so beschaffen, dass sie auch mit den bekannten Methoden, natürlich mithilfe der hinreichend bekannten Reduktion von Integralformeln, erledigt werden können und daher die Integrale im Allgemeinen dargeboten werden können. Aber diese Operation erfordert sehr lange Rechnungen, weswegen unsere hinreichend einfachen Formeln für den Fall $x = \infty$ nichtsdestoweniger der ganzen Aufmerksamkeit würdig sind. Wannimmer wir aber dem Exponenten n negative Werte zuteilen wollten, erfordern diese Fälle sofort am Anfang der Integration die Addition einer unendlichen Konstante, damit die Integrale natürlich im Fall $x = 0$ verschwinden, und so werden sogar die Werte der Integrale, welche wir hier suchen, unendlich bleiben und sind daher nicht zu unserem Unterfangen zu rechnen.

§15 Aber hier taucht ein höchst merkwürdiger Fall auf, in dem $n = 0$ ist und der einen völlig einzigartigen Kunstgriff verlangt; wir wollen diesen also genauer entwickeln. Weil wir

$$\triangle = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)$$

gesetzt haben, wollen wir in gleicher Weise

$$\triangle' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \quad \text{und} \quad \triangle'' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n+1)$$

festlegen und es wird offensichtlich

$$\triangle = \frac{\triangle'}{n} \quad \text{und} \quad \triangle' = \frac{\triangle''}{n+1}$$

und daher

$$\triangle = \frac{\triangle''}{n(n+1)}$$

sein. Wir wollen nun $n = \omega$ nehmen, während ω unendlich klein ist, und weil $\Delta'' = 1$ ist, wird $\triangle = \frac{1}{\omega}$ und daher wird sein Wert unendlich sein. Weil aber für die erste Integralformel $\sin n\theta = \omega\theta$ ist, ist es ersichtlich, dass $\triangle \sin n\theta = \theta$ sein wird; deswegen wird diese erste Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{x} e^{-px} \sin qx = \theta$$

sein, während natürlich das Integral von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = \infty$ erstreckt wird. Aber der Wert unserer anderen Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{x} e^{-px} \cos qx$$

wird unendlich groß sein. Jener Fall verdient es aber vollkommen, dass wir ihn in einem einzigartigen Theorem erfassen.

THEOREM 3

§16 *Wenn die Buchstaben p und q irgendwelche positiven Zahlen bezeichnen und daraus der Winkel θ gesucht wird, dass*

$$\tan\theta = \frac{q}{p}$$

ist, wird man die folgende höchst bemerkenswerte Integration haben

$$\int \frac{\partial x}{x} e^{-px} \sin qx \begin{bmatrix} \text{von} & x = 0 \\ \text{bis} & x = \infty \end{bmatrix} = \theta,$$

von dem Beweis welches Theorems ich bezweifle, dass er auf eine andere Weise als durch Approximation ausfindig gemacht werden kann.

§17 Aber der einfachste Fall, in dem $p = 0$ und $q = 1$ ist, scheint schon alle bis jetzt bekannten Kunstgriffe zu übersteigen; weil aber in diesem Fall

$$\tan\theta = \frac{1}{0} = \infty$$

ist, wird

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

sein, woher diese Integration entspringt

$$\int \frac{\partial x}{x} \sin x = \frac{\pi}{2}.$$

Dennoch lässt sich über ihre Gültigkeit umso weniger zweifeln, weil die verwendeten Approximationen fast zu demselben Wert führen. Wenn wir diesen Fall mit dem anfangs erwähnten

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} \sin x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

vergleichen, verdient die riesige Ähnlichkeit die höchste Aufmerksamkeit, weil das Integral von dieser genau die Quadratwurzel von jener ist.